EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

33e JAARGANG 1957/58
III - 1 NOVEMBER 1957

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Den Haag.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HET ONDERWIJS IN DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING IN VERBAND MET DE NATUURWETENSCHAPPEN [1])

door

Dr. J. W. DEKKER

1. Om na te gaan, welke waarde het onderwijs in de differentiaal- en integraalrekening op onze scholen heeft of kan hebben voor het onderwijs in de natuurwetenschappen en welke delen van de differentiaal- en integraalrekening in verband hiermee behandeld moeten worden, zullen we eerst moeten zien bij welke, binnen het kader van het V.H.M.O. vallende, onderwerpen de begrippen differentiaalquotient en integraal een rol spelen en waar de techniek van het differentiëren en integreren van belang is. We zullen dus eerst een aantal van deze onderwerpen de revue laten passeren en daarna trachten tot enige algemene conclusies te komen.

2. Bijna alle binnen het bereik van de school vallende toepassingen van de infinitesimaalrekening op natuurwetenschappelijk terrein liggen in het gebied van de natuurkunde, althans wanneer we hiertoe ook de gewoonlijk binnen het raam van dit vak behandelde mechanica rekenen.

Als eerste voorbeeld wil ik noemen: de begrippen snelheid en versnelling bij een veranderlijke beweging en het verband tussen de formules

$$v_t = v_0 + at \text{ en } s = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2.$$

Deze onderwerpen zullen gewoonlijk wel aan de orde komen voordat de wiskundeleraar aan de differentiaalrekening toe is. Wil men bij deze gelegenheid het begrip „snelheid op een bepaald tijdstip" nauwkeurig definiëren, dan zal men deze snelheid moeten beschouwen als de waarde waartoe de „gemiddelde snelheid" gedurende een op dat tijdstip volgende tijd nadert als we die tijd tot nul laten naderen. Deze behandelingswijze lijkt mij beter dan

[1]) Lezing, gehouden voor de groep Liwenagel op 30 aug. 1956, met enkele toevoegingen, o.a. van in de discussie naar voren gekomen punten en met weglating van de zgn. wet van Weber-Fechner, in verband met hieromtrent gewijzigde inzichten van de schrijver.

die, waarbij men spreekt over wat er zou gaan gebeuren als de op het beschouwde lichaam werkende kracht plotseling zou ophouden te werken, omdat het begrip snelheid onafhankelijk van de wet van de traagheid gedefinieerd behoort te worden. Bij de bespreking van het snelheidsbegrip treedt dus voor het eerst, al is het dan misschien alleen nog in woorden, een differentiaalquotient op. Wat nu de formules van de eenparig versnelde beweging betreft, is een ietwat globale afleiding van de formule voor de weg uit die voor de snelheid na t seconden, via het gemiddelde van begin- en eindsnelheid, zeker het meest op zijn plaats. De afleiding van de formules uit elkaar door differentiëren of integreren kan later door de wiskunde-leraar geschieden.

Bij de eenparig versnelde beweging geeft de versnelling aanvankelijk geen aanleiding tot limiet-beschouwingen. Wèl treedt weer een differentiaalquotient op bij de berekening van de centripetale versnelling bij de eenparige cirkelbeweging. De techniek van het differentiëren speelt hier echter geen rol.

3. Belangrijke diensten kan de differentiaalrekening verrichten bij de behandeling van de harmonische trilling. Dat bij een beweging die de projectie is van een eenparige cirkelbeweging op een middellijn van de cirkel, anders gezegd, bij een trilling volgens de formule

$$u = A \sin \frac{2\pi t}{T},$$

de versnelling evenredig is met de uitwijking, is door twee maal differentiëren gemakkelijk af te leiden en men kan, na eenmaal van die afleiding kennis genomen te hebben, ook direkt uit het hoofd de evenredigheidsfactor

$$\frac{a}{u} = -\frac{4\pi^2}{T^2}$$

weervinden. Deze laatste betrekking kan gebruikt worden voor de berekening van de trillingstijd als de waarde van $\frac{a}{u}$ bekend is, wat o.a. van belang is voor de berekening van de slingertijd van een mathematische slinger.

Bij de berekening van de versnelling van het trillende punt door projectie van de centripetale versnelling van het in de cirkel rondlopende punt stuit men op minstens even grote moeilijkheden, terwijl verder dat fictieve rondlopende punt een naar mijn smaak wat te grote rol speelt en men hier zeker niet zò zonder moeite

de formule

$$\frac{a}{u} = -\frac{4\pi^2}{T^2}$$

weer te voorschijn roept.

In direkt verband met het bovenstaande staat de afleiding van de formule voor de trillingstijd van een electrische trillingskring. Hierop kom ik straks bij de bespreking van de electromagnetische inductie terug.

4. Met het begrip integraal als limiet van een som krijgen we in de natuurkundeles te maken wanneer een arbeid berekend moet worden en wel voornamelijk in die gevallen, waarbij de kracht veranderlijk is. Het belangrijkste geval waarbij het toepassen van de integraalrekening vlug tot het resultaat voert, is wel de berekening van de electrostatische potentiaal van een puntlading.

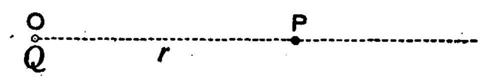


Fig. 1

In een punt P op een afstand r van de zich in O bevindende lading Q is de kracht op de eenheidslading

$$\frac{Q}{r^2}.$$

De arbeid, door het veld op de eenheidslading verricht als deze zich langs de lijn $O\,P$ naar het oneindige verplaatst, dus de potentiaal in P, is derhalve

$$\int_r^\infty \frac{Q}{r^2}\,dr = \left[-\frac{Q}{r}\right]_0^\infty = 0 - \left(-\frac{Q}{r}\right) = \frac{Q}{r}.$$

Deze afleiding munt uit door kortheid, maar dit is ten dele toch maar schijn, want aan het opschrijven van de integraal zal een limietbeschouwing moeten voorafgaan. Daar verder, zoals bij iedere integratie, de zo moeilijke overgang van de integraal als limiet van een som naar het verschil van twee waarden van de primitieve functie een rol speelt, verdient, naar het mij toeschijnt, met het oog op de begrijpelijkheid, in eerste instantie in de natuurkundeles toch wel die andere afleiding de voorkeur, waarbij opgemerkt wordt dat de arbeid over het interval

$$r_1 < r < r_2,$$

die inligt tussen de twee uitdrukkingen

$$\frac{Q}{r_1^2}\Delta r + \frac{Q}{(r_1+\Delta r)^2}\Delta r + \ldots + \frac{Q}{\{r_1+(n-1)\Delta r\}^2}\Delta r$$

en

$$\frac{Q}{(r_1+\Delta r)^2}\Delta r + \frac{Q}{(r_1+2\Delta r)^2}\Delta r + \ldots + \frac{Q}{(r_1+n\Delta r)^2}\Delta r,$$

waarin

$$r_1 + n\Delta r = r_2$$

en die dientengevolge gelijk moet zijn aan de limiet waartoe deze beide uitdrukkingen naderen als n onbegrensd toeneemt, bijgevolg ook gelijk moet zijn aan de voortdurend tussen deze uitdrukkingen inliggende vorm

$$\frac{Q}{r_1(r_1+\Delta r)}\Delta r + \frac{Q}{(r_1+\Delta r)(r_1+2\Delta r)}\Delta r + \ldots + \frac{Q}{\{r_1+(n-1)\Delta r\}(r_1+n\Delta r)}\Delta r,$$

die gemakkelijk herleid wordt tot

$$\left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_1+\Delta r}\right) + \left(\frac{Q}{r_1+\Delta r} - \frac{Q}{r_1+2\Delta r}\right) + \ldots + \left(\frac{Q}{r_1+(n-1)\Delta r} - \frac{Q}{r_1+n\Delta r}\right)$$

en dus gelijk is aan de van n onafhankelijke uitdrukking

$$\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2}.$$

De potentiaal op de afstand r_1 wordt dan natuurlijk gevonden door $r_2 = \infty$ te nemen.

Hierna kan desgewenst gewezen worden op de betrekking

$$F = -\frac{dV}{dr},$$

die vrij gemakkelijk onafhankelijk van de formules voor F en V bewezen kan worden.

De afleiding met volledig gebruik van integraalrekening kan eventueel later door de wiskunde-leraar gegeven worden en is dan een prachtig voorbeeld van de vereenvoudigingen, waartoe de nieuwe rekenwijze kan leiden.

5. Aan het voorgaande laat zich vastknopen de berekening van de arbeid, nodig om een lichaam van het aardoppervlak tot op

een zekere hoogte daar boven te brengen. Is de massa van het lichaam m gram en dus de aantrekkingskracht, die het aan de aardoppervlakte ondervindt,

$$mg \text{ dynes,}$$

dan wordt, als we de straal van de aarde R stellen, de op een afstand r van het middelpunt van de aarde ondervonden kracht

$$K = \frac{R^2}{r^2} mg$$

en dus de arbeid bij een verplaatsing vanaf de aardoppervlakte tot op een afstand nR van het middelpunt:

$$mgR^2 \int_R^{nR} \frac{1}{r^2} dr = mgR^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{nR}$$

$$= \frac{mgR^2}{R} - \frac{mgR^2}{nR}$$

$$= mgR \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Gemakkelijk volgt hieruit dan de ontsnappingssnelheid voor een molecuul in de aardatmosfeer of voor een ruimtevaartprojectiel:

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = mgR$$

geeft

$$v = \sqrt{2gR},$$

dus

$$v \approx 11 \; km/\text{sec}.$$

Aardig is het ook, de ontsnappingssnelheid vanaf de maanoppervlakte hiermee te vergelijken.

6. Een ander voorbeeld van de berekening van een arbeid, waarbij in wezen een integratie verricht wordt, is de afleiding van de formule

$$A = \tfrac{1}{2} QV$$

voor het arbeidsvermogen van een geladen condensator. Hier is echter, evenals dit bij de afleiding van een formule als $s = \frac{1}{2}at^2$ het geval was, eigenlijk de zaak te eenvoudig om er het zware geschut van de integraalrekening bij te halen.

7. Expliciet treedt een differentiaalquotient op in de formule voor de electromotorische kracht van inductie,

$$E_{\text{ind.}} = -\frac{1}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Wil men aantonen dat bij een sinusvormig verloop van de magnetische krachtstroom ook een sinusvormig verloop van $E_{\text{ind.}}$ optreedt en dat deze laatste 90° in phase verschilt met de krachtstroom, dan kan men van het differentiëren van de sinus gebruik maken, maar erg nodig is dit niet: aan de hand van de grafische voorstelling is de gang van zaken ook wel duidelijk te maken en die manier verdient wegens de aanschouwelijkheid wel de voorkeur.

8. Belangrijker diensten kan ons de differentiaalrekening bewijzen op het terrein van de zelfinductie. Niet alleen toch hebben we ook hier direkt bij ons uitgangspunt, de definitie van de coëfficient van zelfinductie, zoals die opgesloten ligt in de formule

$$E_{\text{ind.}} = -L\frac{di}{dt},$$

een differentiaalquotiënt nodig, maar hierop voortbouwende kunnen we met vrucht van de differentiaalrekening gebruik maken voor de afleiding van de zo belangrijke formule voor de trillingstijd in een keten met capaciteit en zelfinductie bij te verwaarlozen weerstand.

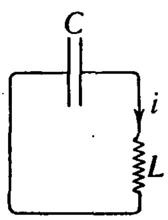


Fig. 2

Deze afleiding staat in het nauwste verband met het onder 3 besprokene over de harmonische trilling.

In nevenstaand schema geldt nl, als V het potentiaalverschil tussen de platen van de condensator is,

$$iR = V + E_{\text{ind.}},$$

dus bij een weerstand 0,

$$V = -E_{\text{ind.}},$$

dus, als Q de lading van de condensator voorstelt,

$$\frac{Q}{C} = -E_{\text{ind.}},$$

dus

$$\frac{Q}{C} = L\frac{di}{dt}$$

en derhalve, daar

$$i = -\frac{dQ}{dt},$$

$$\frac{Q}{C} = -L\frac{d^2Q}{dt^2},$$

dus

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} \cdot Q,$$

waaraan dan voldaan wordt door een sinusvormige trilling, bij welke

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{LC},$$

dus

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

9. Met behulp van een vrij eenvoudige integratie kan de wet van Biot en Savart voor de magnetische veldsterkte bij een oneindig lange rechte stroomgeleider afgeleid worden uit de elementairwet van Laplace.

Stelt men nl., i uitdrukkende in electromagnetische eenheden, de bijdrage van het stroomelement $i\,dl$ tot de magnetische veldsterkte in P

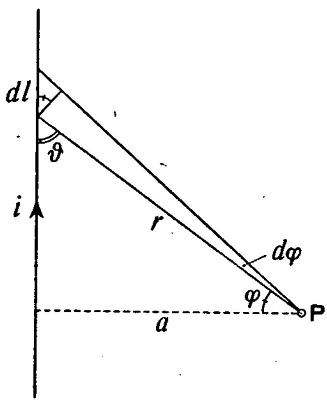


Fig. 3

$$dH = \frac{i\,dl \sin\vartheta}{r^2},$$

dan is

$$dH = \frac{i\,dl \cos\varphi}{r^2},$$

dus, daar

$$dl \cos\varphi = r\,d\varphi,$$

$$dH = \frac{i\,r\,d\varphi}{r^2} = \frac{i\,d\varphi}{r}.$$

Maar

$$r = \frac{a}{\cos\varphi},$$

dus

$$dH = \frac{i \cos\varphi\, d\varphi}{a},$$

zodat

$$H = \frac{i}{a}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{i}{a}\left[\sin\varphi\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$= \frac{2i}{a}.$$

10. De integraalrekening kan ons ook van dienst zijn bij de bespreking van het verband tussen de effectieve spanning en stroomsterkte enerzijds en de maximale spanning en stroomsterkte anderzijds bij een wisselstroom.

Is

$$i = i_{\max} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

dan volgt uit

$$i_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt,$$

$$i_{\text{eff}}^2 = \frac{i_{\max}^2}{T} \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt,$$

dus, daar

$$\int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \tfrac{1}{2} \int_0^T dt = \tfrac{1}{2} T,$$

$$i_{\text{eff}}^2 = \frac{i_{\max}^2}{T} \cdot \tfrac{1}{2} T = \tfrac{1}{2} i_{\max}^2,$$

zodat

$$i_{\text{eff}} = \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}}$$

en evenzo

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

In plaats van gebruik te maken van de, aan de hand van een grafische voorstelling mondeling nader toe te lichten, gelijkheid

$$\int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt$$

kan men er ook gemakkelijk komen door overgang op de cosinus van de dubbele hoek.

11. Uit de warmteleer komt voor behandeling met een goede klas nog wel in aanmerking de afleiding van de vergelijking van Poisson voor de adiabaat van een ideaal gas, niet zonder belang, omdat adiabatische toestandsveranderingen nu eenmaal een grote rol spelen, bij de motoren, bij luchtstromingen in de atmosfeer en, niet te vergeten, bij de voortplanting van het geluid.

Bij de hier volgende afleiding moeten de leerlingen van te voren op de hoogte zijn van de vergelijking

$$c_p - c_v = R.$$

Bij een adiabatische toestandsverandering van een gas is de door het gas verrichte uitwendige arbeid gelijk aan de vermindering van de inwendige energie van het gas, dus

$$pdv = -dU.$$

Nu is bij een ideaal gas, de inwendige energie onafhankelijk van het volume en dientengevolge geldt, als we 1 gram van zo'n gas beschouwen,

$$dU = c_v dT.$$

Bij een adiabatische toestandsverandering geldt dan

$$c_v\, dT + pdv = 0.$$

Maar

$$pv = RT,$$

dus

$$T = \frac{pv}{R},$$

zodat

$$dT = \frac{pdv + vdp}{R}$$

$$= \frac{pdv + vdp}{c_p - c_v},$$

dus

$$\frac{c_v(p\,dv + v\,dp)}{c_p - c_v} + p\,dv = 0,$$

$$c_v v dp + c_p p dv = 0,$$

m.a.w.

$$vdp + kpdv = 0; \quad \left(k = \frac{c_p}{c_v}\right).$$

Hieruit volgt nu

$$v^k dp + kpv^{k-1}dv = 0,$$

$$v^k dp + p\,dv^k = 0,$$

$$d(pv^k) = 0,$$

dus

$$pv^k = \text{const.}$$

Heeft men het differentiëren van de logaritme behandeld, dan kan het laatste deel van de afleiding ook zo gegeven worden:

$$vdp + kpdv = 0,$$

$$\frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0,$$

$$d \ln p + k d \ln v = 0,$$
$$d \ln p v^k = 0,$$
$$\ln p v^k = c,$$
$$p v^k = c'.$$

12. Als mooie toepassing van de integraalrekening op de mechanica valt te vermelden de berekening van traagheidsmomenten, b.v. dat van een homogene rechte staaf ten opzichte van één van zijn uiteinden,

$$J = \tfrac{1}{3} m l^3$$

met de daaruit volgende lengte van de mathematische slinger met dezelfde slingertijd,

$$\tfrac{2}{3} l,$$

een gemakkelijk experimenteel te controleren resultaat.

13. Uit de aerostatica kan men, bij voldoende bekendheid met het differentiaalquotient van de logaritme en enig begrip van het integreren als mooie toepassing van dit alles behandelen de afhankelijkheid van de barometerstand van de hoogte in de atmosfeer.

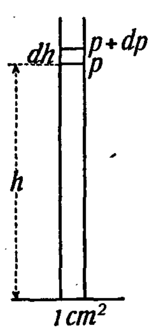


Fig. 4

Denken we hierbij voorlopig de temperatuur overal 0° C.

Bij een druk van $p \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^2}$ wegen dan dh cm³ lucht

$$\frac{p}{76.13{,}6} \cdot 0{,}0013\ dh \text{ gram.}$$

Hieruit volgt dat bij een stijging van

$$dh \text{ cm}$$

optreedt een (negatieve) drukvermeerdering

$$dp = -\frac{0{,}0013}{76.13{,}6} p\, dh \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$$

$$= -0{,}000\,001\,26\ p dh \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}.$$

Dus is

$$\frac{dp}{p} = -0{,}000\,001\,26\ dh,$$

$$d \ln p = -0{,}000\,001\,26\ dh,$$

waaruit door integratie volgt $\ln p - \ln p_0 = -0{,}000\,001\,26\ h$ en derhalve

$$p = p_0 \cdot e^{-0{,}000\,001\,26\, h},$$

dus, als we h niet in cm, maar in km uitdrukken,

$$p = p_0 \cdot e^{-0{,}126\, h}.$$

Hieruit volgt

$$p = \tfrac{1}{2} p_0 \text{ voor } h = 5{,}50 \text{ km}.$$

Brengen we achteraf in rekening een temperatuurdaling van ongeveer 28°, dus een gemiddelde temperatuur over de hele luchtkolom van ongeveer — 14°C, dan komen we tot een ongeveer 5 % kleinere hoogte, dus tot ongeveer 5,2 km.

14. Andere voorbeelden van exponentiële functies, gemakkelijk door integratie te vinden, zijn nog de hoeveelheid van een door radioactiviteit vervallend element als functie van de tijd,

$$Q = Q_0 \cdot e^{-ct}$$

en de hoeveelheid licht, die door een absorberende laag van de dikte s doorgelaten wordt,

$$I = I_0 \cdot e^{-as},$$

als we resp.

$$\frac{dQ}{Q} = -\, cdt \quad \text{en} \quad \frac{dI}{I} = -\, a\,ds$$

stellen.

15. Op de terreinen van de scheikunde en de biologie vond ik geen voor de school geschikte met infinitesimaalrekening te behandelen onderwerpen.

Bij de scheikunde denkt men wel het eerst aan reactiesnelheden en -tijden bij uni- en bimoleculaire reacties. Deze dingen zijn echter, vooral in verband met het eventueel tegelijkertijd optreden van de omgekeerde reacties, m.i. te ingewikkeld om er met onze leerlingen aan te beginnen. Bij de biologie komt ons al gauw de z.g.n. modificatiekromme in de gedachten, maar een volledige afleiding van de formule voor zulk een kromme loopt over de formule van Stirling voor de faculteit en gaat dus ver boven het schoolniveau uit.

16. Eerder komt nog in aanmerking een onderwerp uit de astronomie, nl. de afleiding van Kepler's wet van de perken.

Beweegt zich in een plat vlak een materieel punt P met de Cartesiaanse coördinaten x en y, onder invloed van een steeds naar de oorsprong van het assenstelsel gerichte kracht met de componenten X en Y, dan is voortdurend

$$X : Y = x : y,$$

dus

$$Xy - Yx = 0,$$

dus

$$m\ddot{x}y - m\ddot{y}x = 0,$$

dus ook

$$\ddot{x}y - \ddot{y}x = 0.$$

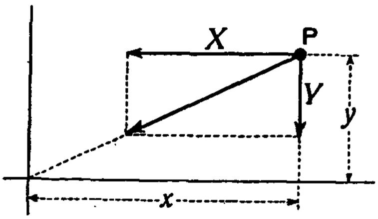


Fig. 5

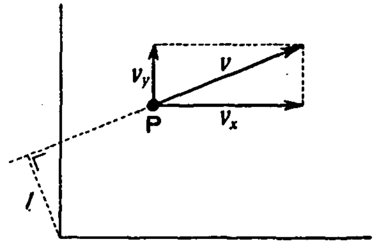


Fig. 6

Deze vergelijking kunnen we ook schrijven in de vorm

$$\frac{d(\dot{x}y - \dot{y}x)}{dt} = 0,$$

waaruit volgt dat

$$\dot{x}y - \dot{y}x = \text{const.},$$

m.a.w.

$$v_x y - v_y x = \text{const.}$$

Nu stelt het linkerlid van deze vergelijking als som van de momenten van de componenten van de snelheid, het moment van die snelheid ten opzichte van de oorsprong voor, dus dit moment

$$lv = \text{const.}$$

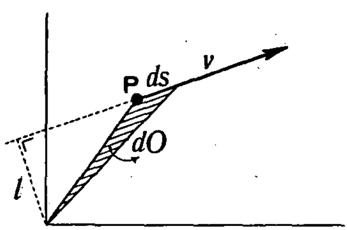


Fig. 7

In een tijdselement dt wordt echter door de voerstraal uit de oorsprong een oppervlakte

$$dO = \tfrac{1}{2}\, lds$$
$$= \tfrac{1}{2}\, lvdt$$

doorlopen, dus in gelijke tijdselementen gelijke oppervlakten.

17. Welke conclusies moeten we nu uit het voorgaande trekken ten opzichte van het onderwijs in de differentiaal- en integraalrekening? Naar het mij toeschijnt de volgende:

a. Bij quantitatieve natuurkundige beschouwingen speelt het begrip differentiaalquotiënt een zo grote rol, dat het zeker op de weg van het wiskunde-onderwijs ligt, onze leerlingen, althans de B's, dit begrip grondig bij te brengen. Alleen met behulp van differen-

tiaalquotiënten kan de samenhang tussen de veranderingen der van elkaar afhankelijke natuurkundige grootheden op bevredigende wijze weergegeven worden.

De kennis van differentiaal*rekening* komt ons bij de gewoonlijk behandelde onderwerpen vooral te pas bij de harmonische trilling, bij de berekening van de trillingstijd van een electrische stroomkring en bij beschouwingen over het verband tussen veldsterkte en potentiaal in het veld van een puntlading.

b. Het niet zo heel moeilijk te verwerven begrip van de integraal als limiet van een som speelt in de schoolnatuurkunde hoofdzakelijk een rol bij de kennismaking met de electrostatische potentiaal. Kennis van het woord integraal en van de bijbehorende notatie is hierbij niet belangrijk.

Het aanmerkelijk moeilijker te verkrijgen inzicht in het *berekenen* van een integraal met behulp van de primitieve functie moet bij voorkeur in eerste instantie niet in de natuurkundeles als grondslag voor het afleiden van fundamentele natuurkundige formules gebruikt worden.

In de eerste plaats nodig is dus de behandeling van de differentiaalrekening, zeker tot en met de goniometrische functies; een behandeling van het integreren is zeker gewenst, maar als we daar eens een jaar niet aan toe komen, is dat voor de op school te behandelen natuurkunde niet erg.

c. Er zijn naast de theorie van de harmonische trillingen en van de electrostatische potentiaal nog heel wat andere, mooie en binnen het bereik van de leerlingen liggende natuurkundige toepassingen van de infinitesimaalrekening. Deze onderwerpen vormen een prachtig materiaal voor de wiskunde-leraar om te laten zien, wat men zoal met de nieuw geleerde rekenwijzen beginnen kan, of voor de physicus die op een aantal dingen wat dieper wil ingaan. Vooral wanneer men, b.v. bij een werkweek, eens wat ruimer in zijn tijd zit of in een aparte cursus van enige uren voor de meest belangstellende leerlingen.

d. Richten we onze blik op het universitaire onderwijs, waarvoor wij voorbereiden, dan valt op te merken dat de leerlingen, die later bij natuurwetenschappelijke of andere studie met differentiaal- en integraalrekening te maken krijgen, steeds zeer dankbaar zijn als ze op school reeds enigszins met deze vakken vertrouwd raakten.

e. Tenslotte valt in verband met ons onderwerp op te merken, dat ook met het oog op de verwerving van een enigermate juist inzicht in de ontwikkeling van het natuurwetenschappelijk denken van de laatste eeuwen en in de daarmee samenhangende problemen

van determinisme en van voorspelbaarheid van het natuurgebeuren, de kennismaking met dat gebied van de wiskunde, dat in zo hoge mate bij deze ontwikkeling betrokken was en met voorbeelden van deze relatie, een geestelijke aanwinst kan betekenen waardoor de aan die kennismaking bestede tijd en moeite rijkelijk beloond worden.

BOEKBESPREKING

R. Gouyon, *Précis de Mathématiques Spéciales*, Paris, Librairie Vuibert, 1956.

In het voorwoord staat: „Ce livre veut être une digue. Digue, d'abord, contre cette marée qui ne connaît point de reflux" en verder: „. . . je précise ici que le programme dont je parle est celui des concours d'admission à l'École polytechnique et, par voie d'alignement, aux autres grandes Écoles du même groupe." Het is bekend, dat men in Frankrijk voor een zekere groep van a.s. studenten hoge eisen stelt ten aanzien van de kennis van de wiskunde. Het ligt niet op mijn weg om die eisen aan enige kritiek te onderwerpen. Bovendien geeft de schrijver — wat hij noemt „un quelconque prolongement du programme"; aan schrijvers landgenoten dus de taak gelaten om te beoordelen, of de inhoud geschikt is voor het gestelde doel. Wat vindt men in dit „overzicht" van bijna 650 bladzijden?

Livre I: Notions fondamentales: nombres, limites, vecteurs, coordonnées. Men vindt een beknopte duidelijke behandeling van het reële getal, van de uitbreiding van de vier bewerkingen met rationale getallen voor reële getallen, de orderelaties. Dàn het limietbegrip, een behandeling van de grondslagen van de analytische meetkunde met gebruikmaken van vectoren; complexe getallen.

Livre II: Compléments d'algèbre et applications géométriques. Dit omvat: behandeling van veeltermen met hun eenvoudigste eigenschappen, lineaire algebra met toepassingen, meetkundige plaatsen. Er wordt van af het begin vlakke en ruimtelijke meetkunde samen behandeld.

Livre III: Éléments de Calcul différentiel et applications géométriques. Dit houdt in: de gebruikelijke behandeling van de beginselen van de differentiaalrekening, functies van meer veranderlijken, impliciete functies, alles met meetkundige toepassingen.

Livre IV: Coniques et quadriques.

Livre V: Éléments de calcul intégral. Hieronder vallen ook de meervoudige integralen, reeksen, gewone differentiaalvergelijkingen.

Livre VI: Éléments de mécanique. Dit omvat: kinematica en dynamica van het stoffelijke punt.

Aan het einde van elk hoofdstuk vindt men een — niet te groot — aantal vraagstukken.

Samenvatting: een boek, dat op heldere — typisch franse — wijze is geschreven en dat een ieder kan worden aanbevolen, die prijs stelt op een duidelijke — zij het steeds beknopte — behandeling van de beginselen van de belangrijke onderdelen uit de hogere wiskunde.

F. Loonstra

DIDACTISCHE REVUE

door

Dr. Joh. H. Wansink

Een jaar lang is er geen „didactische revue" verschenen, niet wegens gebrek aan copie, maar omdat andere, belangrijker artikelen dienden voor te gaan. We hebben in verband met de beschikbare ruimte het overzicht dat persklaar lag, moeten „tiërceren". Het gevolg hiervan is geweest, dat we tal van onderwerpen, die we gaarne onder de aandacht van de lezers zouden hebben gebracht, zelfs niet hebben kunnen noemen. Men vulle de leemte aan door op de tijdschriften een abonnement te nemen bij de heer G. J. J. Boost te Roosendaal (N.Br.).

Zie voor nadere inlichtingen blz. 54 en 55 van de vorige jaargang.

I. *Mathematica & Paedagogia.*

Dit didactisch tijdschrift van onze zuiderburen bevat zo'n schat van gegevens op het gebied van de wiskunde en van het onderwijs in de wiskunde, dat ik alle collega's die het tijdschrift niet door middel van de Wimecos-leesportefeuille onder ogen krijgen, aanraad zich voor 100 fr. per jaar te abonneren bij Dr. G. Bosteels, 283 Grote Steenweg, Berchem-Antwerpen.

Het contact tussen de Belgische en Franse wiskundeleraren komt in nummer 9 tot uitdrukking door de opname van „*Structures algébriques*" (H. Cartan), in nummer 10 door „*Anneaux, Congruences, Idéaux*" (P. Dubreil), beide verslagen van lezingen voor wiskundeleraren gehouden in het Instituut Henri-Poincaré. F. Hotyat beantwoordt in „*Les difficultés psychologiques des débutants dans le raisonnement mathématique*", steunend op onderzoekingen van Meyerson, Goblot, Claparède, Michaud, Piaget en Gattegno, de vragen: Quelle place occupent les mathématiques élémentaires dans l'évolution des conduites intelligentes, quelles sont les principales démarches de la pensée aux prises avec un raisonnement mathématique, quelles conditions psychologiques rendent laborieux l'accession des écoliers au raisonnement mathématique?

In nummer 10 bevindt zich een verslag van een lezing door G. Choquet (Sorbonne) in 1956 te Bombay gehouden. De titel is „*L'enseignement dans les écoles secondaires et la recherche*". Choquet geeft zich rekenschap van het feit, dat het scheppend vermogen van de mens het meest wezenlijke is, dat de mens van een machine onderscheidt.

Si notre dignité humaine consiste dans notre capacité créatrice, c'est precisément cette capacité qui devrait être développée dans les enfants. En d'autres termes, notre enseignement ne devrait plus être l'enseignement d'un gardien de musée, mais celui d'un créateur. Voor de leraar in functie is het nodig de moderne wiskunde te bestuderen: enseigner les mathématiques sans savoir ce que sont les mathématiques modernes serait faire comme un conservateur qui a dans son museé quelques anciens tableaux précieux et qui refuse de savoir qu'il existe une école de peinture moderne, pensant que tout a été dit et peint dans le passé . . . Pendant ces derniers décades l'effort de maint mathématicien a consisté dans la découverte et l'étude des structures fondamentales des mathématiques, . . . dont beaucoup apparaissent déjà, en germe, dans l'entité mathématique la plus classique, l'ensemble des nombres réels . . . L'importance de ces structures est due à plusieurs raisons. Une d'elles est que les plus simples: les relations d'équivalence, les relations d'ordre et même les structures de groupe semblent correspondre à la structure de notre cerveau, comme il résulte des études de Piaget — et ceci veut dire que nous devions faire un emploi plus étendu de ces structures dans l'enseignement des enfants, même des enfants très jeunes. Une autre raison de leur importance est qu'on les trouve partout en mathématiques.

Choquet gaat na, welke invloed zijn opvattingen zullen hebben t.a.v. de herziening van de wiskunde-programma's.

Op de 19e „*Conférence internationale de l'instruction publique*", die in juli 1956 onder de auspiciën van de Unesco en het Bureau international d'Education te Genève werd gehouden, stonden de volgende drie punten op de agenda:

(1) inspection de l'enseignement;
(2) enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires;
(3) rapports succints des ministères de l'éducation sur le mouvement éducatif durant l'anneé 1955—1956.

Er waren 75 landen vertegenwoordigd, Nederland door de inspecteurs Mr. Ir. M. Goote en A. J. S. van Dam.

Als algemeen rapporteur over het wiskundeonderwijs trad op W. Servais (België). Zijn rapport is opgenomen in nummer 10 van dit tijdschrift.

Recommandation No 43, bestemd voor de ministers van onderwijs in de diverse landen, werd in het voorjaar 1957 in de Nederlandse weekbladen voor V.H.M.O. overgenomen.

In nummer 9 laat M. Soens in zijn bijdrage over *„de intuïtieve meetkunde in het M.O."* de bezwaren van velerlei zijden naar voren gebracht (Beth, Dieudonné, Choquet) alle recht wedervaren om daarna het goede recht van de invoering van de intuïtieve meetkunde in het Belgisch onderwijs (1948) te bepleiten. De auteur beschouwt de intuïtieve meetkunde als de onmisbare schakel tussen de vormleer voor de lagere school en de meer rationele studie van de meetkunde in de hogere klassen van het M.O.

II. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.*

In nummer 179 (october 1956) geeft A. Crumeyrolles in *„Etude sur une algèbre abstraite Booléienne"* een opsomming van de axioma's en fundamentele theorema's met de bewijzen ervan, om vervolgens via een meetkundig model de consistentie van de axioma's aan te tonen. Hij toont vervolgens aan: la logique des propositions est une algèbre de Boole; la structure des circuits électriques se rattache à l'algèbre de Boole.

Een door vele voorbeelden uit de schoolpraktijk geïllustreerd artikel van J. Siros, getiteld *„Réflexions sur l'interprétation d'un programme"*, doet de starheid en de verstarring die het wiskunde-onderwijs van thans zo vaak aangewreven worden, o.a. met de volgende woorden uitkomen:

Lorsque j'étais un jeune élève, je croyais que les Mathématiques se distinguaient des autres disciplines par leur fixité, leur rigidité: Je croyais que le professeur était chargé de nous transmettre des modèles parfaits et définitifs selon un rite très bien réglé, immuable, déterminé uniquement par la nature des problèmes à étudier et par les exigences propres à ces derniers. J'étais naif. J'ignorais qu'il y a cent façons de présenter une question: j'ignorais que lorsque mon professeur entreprenait l'étude d'un chapitre, il allait, devant nous, faire une véritable création.

In een artikel van de voorzitter van de A.P.M. (G. Walusinski) worden opvolgend behandeld: formation des maîtres; les travaux pratiques; la réforme de l'enseignement „toujours annoncée par le Ministre, mais jamais réalisée par son successeur".

III. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht.*

In 9. Band 4. Heft schrijft B. Steffen *„Über den Entwicklungs-*

gang des Lehrers der Mathematik, vom Standpunkt des Pädagogischen Seminars aus gesehen".

Met voorbeelden illustreert hij, dat „dem Kandidaten bei der Beschäftigung mit fachmethodisch-didaktischen Fragen und insbesondere bei der Behandlung geschlossener fachmethodischer Themen doch bald zum Bewusztsein [kommt] dasz das reine Wissen um mathematische Tatsachen allein nicht genügt, sondern dasz für eine erfolgreiche Bearbeitung fachmethodischer Fragenkreise Einblicke in die mathematischen Zusammenhänge von ausschlaggebender Bedeutung sind". De vakwetenschappelijke studie maakt de leraar tot een rijpe persoonlijkheid, die eerst nu door zijn belangstelling voor opgroeiende leerlingen de pedagogische problemen, waarvoor hij onherroepelijk gesteld wordt, in ernst zal kunnen aanpakken. De auteur erkent de essentiële verschillen tussen de wetenschappelijke onderzoeker en de wetenschappelijke leraar. Bij de opleiding dient echter wetenschappelijk dilettantisme uitgeschakeld te blijven.

„Bei mangelhafter wissenschaftlicher Vorbildung bedeuten pädagogische Fähigkeiten eine ernste Gefahr, da durch sie Falsches in geschickter Einkleidung nicht immer sogleich als falsch erkannt werden würde." De auteur is gekant tegen encyclopedisme in de opleiding, maar pleit voor concentratie van de essentiële leerstof.

Aan de *„Mitteilungen"* in 9. Band, 5. Heft ontleen ik: Der schwedische Ministerpräsident Erlander, der vorher mehrere Jahre lang Erziehungsminister war, äuszerte bei seiner Rückkehr von einem Besuch in der Sowjet-Union, dasz die Kinder dort bereits in den ersten Schulklassen im Denken mit abstrakten mathematischen Begriffen vertraut gemacht würden. Er sah hierin einen der Gründe dafür, dasz die sowjetische Technologie und Wissenschaft heute über ansehnliche Fortschritte verfüge und dasz in der Sowjet-Union heute mehr Wissenschaftler und Ingenieure hervorgebracht würden als in den U.S.A.

In 9. Band, 8. Heft verzet W. Böhme zich tegen het opnemen van steeds meer wiskundige methoden in het onderwijs op de middelbare school. Zijn ideaal blijft: „Mit möglichst wenig Werkzeug möglichst viel erreichen!" Die Pflege räumlicher Anschauung im Gegensatz zur nur planimetrischen ist schon eine sehr alte Forderung. Ihr wird aber fast nur bei der Volumenberechnung mathematischer Körper und mancherorts durch die Behandlung der darstellenden Geometrie Rechnung getragen. Warum — aldus de auteur — hat man aber in der analytischen Geometrie auf die Forderung der Räumlichkeit verzichtet, obwohl doch gerade

unsere auf der Schule zweidimensional vorgebildeten Schüler auf der Universität sofort n-dimensional arbeiten müssen?

In zijn artikel „*Driedimensionale Geometrie und Analysis*" laat de auteur zien, hoe hij, uitgaande van de wet van Boyle-Gay Lussac tot de constructie van ruimtelijke modellen komt, die een inleiding tot de analytische meetkunde èn tot partiële differentiatie mogelijk maken.

In een gedegen artikel over „*Mathematik als mathesis universalis*" (9. Band, 10. Heft) vraagt E. Wopperer zich af, hoe men kan garanderen dat het onderwijs in de wiskunde los van de technische vorming die het meebrengt, ook inderdaad pedagogische betekenis heeft. Is de wiskunde een wetenschap, die „existentiell am wenigsten relevant ist"? De problematiek rondom deze vraag wordt geïllustreerd met drie mathematici van grootse allure: Gausz, Leibniz, Pascal. De auteur is van oordeel dat ingeval de bewering van Weyl „die Mathematik ist nicht das starre und Erstarrung bringende Schema, als das der Laie sie so gerne sieht, sondern wir stehen mit ihr genau in jenem Schnittpunkt von Gebundenheit und Freiheit, welcher das Wesen des Menschen selbst ist", juist is, de consequenties van deze opvatting ook ons onderwijs dienen te beinvloeden.

Aanknopende bij Felix Klein's Erlanger Programm, waarvan de richtlijnen ook nu nog voor ons onderwijs gezag hebben, wijst hij op twee fundamentele begrippenparen, die in de school tot hun recht dienen te komen: functie-limiet en vector-groep. Ten aanzien van de begrippen functie en limiet is het pleit gewonnen; de taak van de school is om nu ook de begrippen vector en groep een didactisch verantwoorde plaats in het V.H.M.O. te geven.

In 10. Band, 1. Heft bevat het artikel „*Konstruktionen zur stetigen Teilung*" van Th. Lambacher een verdeling in uiterste en middelste reden die eenvoudiger is dan de gangbare en die tevens een benadering van π in 5 decimalen geeft door de constructie van een lijnstuk dat bij benadering $\frac{5}{6}$ deel van de cirkelomtrek is.

F. Steiger geeft in „*Über die Grundlösungen der Gleichung* $a^2+b^2+c^2 = d^2$" (10. Band, 2. Heft) een methode aan die de hiaten in het artikel van O. Hofmann (M.N.U, VI/6, blz. 259 e.v.) opvult.

M. Wagenschein schrijft een zeer waarderend artikel „*Zum achtzigsten Geburtstag von Frau Ehrenfest-Afanassjewa*".

In 10. Band, 3. Heft (juli 1957) schrijft H. Greinacher „*Über das Gewicht bewegter Körper*". Das richtige Gewicht zeigt eine Personenwaage bekanntlich nur an, wenn man ruhig darauf steht. Jede Bewegung erzeugt Gewichtsschwankungen, und zwar, da der Gesamtimpuls Null erhalten bleibt, stets nacheinander in der einen

und der anderen Richtung. Während sich daher das momentane Gewicht ändert, bleibt der zeitliche Mittelwert derselben, der als dynamisches Gewicht bezeichnet wird, konstant gleich dem gewöhnlichen, d.h. dem statischen Gewicht. Weniger einfach sind die Verhältnissen, wenn man nach dem dynamischen Gewicht eines sich zeitweilig von der Unterlage abhebenden Gegenstandes fragt. An Hand von einigen typischen Beispielen wird gezeigt, dasz das dynamische Gewicht bald gleich, bald verschieden grosz vom statischen ausfallen kann.

IV. *Elemente du Mathematik.*

Nummer 4 (Band XI) bevat een artikel van J. - P. Sydler „*Sur les tétraèdres équivalents à un cube*". Rappelons que deux polyèdres sont dits équivalents lorsque l'on peut décomposer l'un en polyèdres partiels avec lesquels on peut construire l'autre. En 1900, Hilbert posait la question qui donna essor à l'étude de l'équivalence: Existe - t - il un tétraèdre qui ne soit pas équivalent à un cube? Peu après, Dehn établissait des conditions algébriques nécessaires pourque deux polyèdres soient équivalents, ce qui permettait de montrer que le tétraèdre régulier n'est pas équivalent à un cube. Dès lors, la question inverse gagnait en intérêt: Existe - t - il un tétraèdre qui soit équivalent à un cube? De auteur beschouwt de tetraeders van Hill die aan de vraag voldoen, en nog vier andere, de enige waarvan tot dusver bekend is dat ze équivalent zijn met de kubus zonder tetraeders van Hill te zijn.

Onder „*Ungelöste Probleme*" in Band XI, Heft 6, vind ik: „Können Summe und Produkt von drei rationalen Zahlen gleichzeitig gleich 1 sein?"

Onder de „*Aufgaben für die Schule*" wordt gevraagd: Sind die folgenden Identitäten richtig?

$$\text{a)}\quad \frac{40^4+51^4+91^4}{79^4} = \frac{40^2+51^2+91^2}{79^2};$$

$$\text{b)}\quad \frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3} = \frac{a+b}{a+(a-b)}.$$

Man darf durch „hoch 2" und durch „hoch 3" kürzen!

Nummer 5 (Band XI) van september 1956 bevat een artikel van F. Steiger, „*Über die Grundlösungen der Gleichung*

$$a^2+b^2+c^2 = d^2."$$

De oplossingen worden gekregen door de volgende vier formules:

$$a = 2(sv+tu)$$
$$b = 2(sv-tu)$$
$$c = (s^2+t^2)-(u^2+v^2)$$
$$d = (s^2+t^2)+(u^2+v^2),$$

indien de parameters s, u, t en v voldoen aan de volgende voorwaarden:

$$s \geqq 1;\ t \geqq 0;\ u \geqq 1;\ v \geqq 0;\ t+v \geqq 1;$$
$$s+t+u+v \equiv 1 \pmod{2};$$
$$s^2+t^2 > u^2+v^2;$$
$$su > tv;$$
de ggd van s^2+t^2, u^2+v^2, $sv+tu$ is 1;
voor $t = 0$ is $v \leqq a$;
voor $v = 0$ is $t \leqq s$.

Een tabel van alle oplossingen met $a < 100$ is opgenomen.
De eenvoudigste getallenvoorbeelden zijn:

$$1^2+2^2+2^2 = 3^2;$$
$$2^2+3^2+6^2 = 7^2;$$
$$1^2+4^2+8^2 = 9^2;$$
$$4^2+4^2+7^2 = 9^2;$$
$$2^2+6^2+9^2 = 11^2;$$
$$6^2+6^2+7^2 = 11^2;$$
$$3^2+4^2+12^2 = 13^2.$$

B. L. van der Waerden schrijft in zijn artikel *„Über die Einführung des Logarithmus im Schulunterricht"*: Der Begriff Logarithmus wird von den Schülern im allgemeinen nur sehr schwer verstanden. Die holländischen Schüler zumindest reagieren mit Unwillen auf diesen Begriff. Das habe ich nicht nur als Schüler bei meinen Klassenkameraden beobachten können, sondern es wurde mir von erfahrenen Mathematiklehrern mehrfach bestätigt.

Hij gaat de diverse wegen na langs welke men kan trachten de moeilijkheden te overwinnen, om dan tenslotte de door Felix Klein aangewezen methode te volgen, die van oppervlaktebeschouwingen uitgaat met de integraaldefinitie van logaritme als uitgangspunt. In Nederland heeft deze methode ondanks herhaalde propaganda ervoor nog geen ingang gevonden. In Duitsland wel; zie b.v. Breidenbach's *„Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht"*.

L. Vietoris analyseert de moeilijkheden verbonden aan een verantwoorde definitie van het begrip boog in zijn artikel: *„Vom Grenzwert* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$."

Hij geeft een weg aan om de moeilijkheden te vermijden en komt daarbij via oneindige produkten tot π.

Als $A[a_1, a_2, a_3]$ en $B[b_1, b_2, b_3]$ twee pythagorische getallentripels zijn, d.w.z. als:

$$a_1^2 = a_2^2+a_3^2 \text{ en } b_1^2 = b_2^2+b_3^2,$$

dan kan men door de volgende bewerking een nieuw pythagorisch getallentripel vinden:

$$\begin{aligned} AB &\equiv [a_1, a_2, a_3] \cdot [b_1, b_2, b_3] \\ &\equiv [a_1b_1+a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1, a_3b_3], \end{aligned}$$

zoals een eenvoudige rekencontrole aantoont.

Dit feit is voor G. Kirschner uitgangspunt voor zijn belangwekkende beschouwingen „*Über eine mit den Pythagoräischen Zahlen zusammenhängende Gruppe*". De auteur schrijft:

In der verhältnismässig jungen Geschichte der Gruppentheorie sind durch sie schon zahlreiche neue Einblicke in die Struktur und in die Ordnungsprinzipien der Mathematik gewonnen worden, und manche wichtige Entdeckungen und Weiterentwicklung in verschiedenen mathematischen Disziplinen wären ohne sie gar nicht möglich gewesen. Auch in den elementaren Bereichen der Mathematik nimmt die Gruppentheorie längst einen stets breiter werdenden Raum in. — In der vorliegenden Arbeit wird eine Gruppe aufgezeigt, deren Elemente Zahlentripel sind und deren Gruppenmultiplikation aus elementaren Beziehungen besteht. Diese Gruppe ist vielseitig deutbar, zeigt viele Zusammenhänge und bietet verschiedene Anwendungsmöglichkeiten.

V. *The Mathematical Gazette.*

In no. 333 (oktober 1956) geeft A. W. Siddons een boeiend overzicht van de reformbeweging in Engeland. Besproken worden o.a. de stichting van de „Association for the improvement of geometrical teaching" (1871), van de „Mathematical Association" (1897), van de vanaf 1902 ingestelde „Teaching Committees", van de „Mathematical Gazette" (1894). De betekenis van de „letter of 23 schoolmasters" (1901) en van de figuur van Perry komt in dit artikel goed tot zijn recht.

B. C. Brookes definieert in „*an introduction to the mathematical theory of information*" dit nog jonge begrip (1948) als volgt: „In telecommunication engineering „information" can be defined as any signal or sequence of signals the engineer may be expected to store or transmit". Aansluiting wordt gezocht bij het werk van Shannon (1948), Goldmar (1953), Woodward (1953).

In no. 334 stelt K. Menger, auteur van „*Calculus, a modern approach*" de vraag: „*What are x and y*?" Hij geeft op deze vraag, die voor het wiskunde-onderwijs van groot belang is, een reeks van antwoorden, door vele voorbeelden geïllustreerd, onder de volgende twaalf rubrieken:
numerical values, the identity function, the selector function, real-valued complex functions, indeterminates, parts of operational symbols, operators, specific fluents (abscissa and ordinates), function variables, fluent variables, sundries, dummies.

D. G. Parkyn bespreekt het probleem van „*The inverting top*", dat in het Nederlands tijdschrift Physica (1952) onderwerp van uitvoerige beschouwingen is geweest (Fokker, Braams, Hugenholtz).

Note 2647, „*A mathematical tile*" geeft voor het wiskundigonderwijs interessante voorbeelden van legpatronen met uit cirkelbogen gevormde contouren, waaronder zeer fraaie. Tegelpatronen van eenvoudiger structuur kennen we in Nederland o.a. uit het werk van de Van Hiele's.

Nummer 335 (februari 1957) opent met een „presidential address to the Mathematical Association, April 1956" van G. L. Parsons met als titel: „*Teaching the teacher*". De auteur geeft een overzicht van enige fundamentele inzichten die vanaf den beginne het werk van de M.A. hebben beheerst.

The need for a new outlook on the teaching of geometry provided for the first 30 years of the society's life the sole reason for its existence.

Parsons analyseert de betekenis van de reeks van rapporten door de M.A. over deze materie gepubliceerd. Hij is van mening dat de mate waarin een leerling van het genoten meetkunde-onderwijs heeft geprofiteerd, beoordeeld moet worden naar zijn bekwaamheid de verworven kennis op nieuwe situaties toe te passen. De betekenis die het onderwijs in de meetkunde heeft, niet alleen voor de begaafde leerlingen maar ook voor de middelmatige, komt in gevaar, als de overtuiging veld mocht winnen, dat de resultaten van meetkunde-onderwijs niet objectief te verifiëren zouden zijn. De auteur vraagt zich af of het niet gewenst is bij het aanvangsonderwijs in de meetkunde drie-dimensionale figuren te behandelen. Moeten alle onderdelen van de schoolwiskunde in onderlinge samenhang worden besproken? Zonder een geschikt leerboek zal er van het „unity- in variety" - principe t.a.v. de samenbundeling der leerstof niet veel terecht kunnen komen. De opvatting dat het wiskunde-onderwijs practisch georiënteerd dient te zijn, stelt de leraar voor tal van nog onopgeloste problemen.

In „*Pythagorean Triads in Babylonian Mathematics*" schrijft E. M. Bruins o.a.: About ten years ago Neugebauer and Sachs published their Mathematical Cuneiform Texts in which the contents of Plimpton 322 were analysed for the first time. The numerical values contained in this text are given in Table I. The theory put forward by Neugebauer and Sachs was in my view not consistent with known facts and in the Proceedings of the Academy at Amsterdam I put forward a different interpretation. Since then I have made several short comments in connection with this text, but up to the present I have not given an explicit interpretation of the errors occurring on Plimpton 322. . . . I consider therefore that it may be of use to give here a short summary of the evidence relating to Pythagorean Triads in Babylonian Mathematics, and to add some hitherto unpublished remarks on the errors which Plimpton 322 contains, and my interpretation of them."

Pseudaria in no. 336 bevat het volgende nummer: *All straight lines are parallel.* For (i) straight lines may be regarded as circles of infinite radius, (ii) all circles pass through the circular points at infinity, and (iii) straight lines which pass through the same point at infinity are parallel.

VI. *The Mathematics Teacher.*

Belangrijk is in nummer 8 van de 49e jaargang (december 1956) de bijdrage van Karl Menger „*Why Johnny hates math*".

De auteur zet uiteen dat vele moeilijkheden die de studie van de wiskunde aan beginnelingen oplegt, veroorzaakt worden door een verward systeem van symbolen en door een gebrekkige terminologie. Deze dateert dikwijls reeds van vóór 1700 en is soms al meer dan twee eeuwen verstard. Terwijl de auteur in een verwant artikel in de Mathematical Gazette een lijst opmaakte van 12 verschillende betekenissen van de symbolen x en y, beperkt hij zich hier tot de volgende voorbeelden:

(1) . . . $x^2-1 = (x+1)(x-1)$;
(2) . . . de functie x^2-1 is niet constant;
(3) . . . x^2-1 is een kwadratische veelterm;
(4) . . . los op de vergelijking $x+1 = 5$;
(5) . . . de rechte lijn met vergelijking $x = 4$.

De auteur wil de leerlingen, eventueel door middel van nieuwe notaties, leren onderscheiden tussen variabelen, functies, onbepaalden, onbekenden, coördinaten. De leerlingen moeten het optreden van x als reëel deel, als parameter, als operator leren verstaan; ze moeten niet in verwarring komen als x in bepaalde integralen slechts

als een „dummy variable" optreedt. De auteur verzucht „Mathematics suffers from x-itis".

Artikelen over het onderwijs in wiskunde in verschillende landen zijn opgenomen. We vinden:
L. G. Woodby „*Mathematics in French secondary schools*", (L, 3);
een artikel van R. S. Fouch over Rusland, (L, 3);
M. Riske „*Mathematics in New-Zealand Schools*, (XLIX, 6).

In nummer 4, jaargang L (april '57) staat een belangrijk artikel van J. M. Kingston „*Mosaics by reflection*". De hierin behandelde leerstof werd gegeven in een televisie-uitzending van een half uur in 1955. Ze zal stellig ook de Nederlandse wiskunde-docenten die bij hun inleiding in de planimetrie tegelstructuren gebruiken, interesseren. I have found, aldus de auteur, that the subject of infinite plane-fillings, or tessalations, by polygons, was greeted with considerable interest by students on this topic before a high school mathematics class or club. Perhaps one reason lies in the ease with which the ideas involved can be demonstrated and the elegance inherent in the resulting symmetry of the mosaics.

There are exactly eleven distinct uniform plane tessalations, including three which are regular, i.e., all the polygons involved are regular and identical. Of these eleven uniform tessalations, only eight are edge-reflexible, by which we mean that each of the eight is symmetric with respect to a line through the midpoint of any edge, perpendicular to that edge. This property of being edge-reflexible permits such a tessalation to be reproduced by a simple arrangement of mirrors . . ."

Figuren illustreren dit in het artikel nader.

M. F. Rosskopf betoogt in „*Modern emphasis in the teaching of geometry*", dat het nodig is enkele fundamentele begrippen uit de moderne wiskunde op school te behandelen.

„Strategy of proof and axiomatic structures are among these key mathematical ideas". Hij licht zijn ideeën toe door een stel axioma's op te stellen voor een „miniature geometry", waarin het aantal punten en lijnen eindig blijft.

In „*What do we mean?*" (XLIX, 8) bespreken Rourke en Rosskopf i.h.b. de begrippen „noodzakelijke en voldoende voorwaarde", en „wortel van een vergelijking".

De „*Letters to the editor*" in XLIX, 6 bevat een interessante discussie tussen J. A. Schumaker en M. F. Rosskopf over het gebruik van de woorden „en" en „of" bij de opsomming van de wortels van een vierkantsvergelijking. Is het onjuist als ik zeg, dat $x = +4$ èn $x = -1$ de wortels zijn van een vergelijking? Moet ik de oplossing aangeven door: $x = 4$ òf $x = -1$?

VII. *School Science and Mathematics.*

In no 495 (oktober 1956) geeft P. Preger in zijn artikel „*Explaining abstractions to high school science students*" een zevental suggestieve voorbeelden, die zo tot de verbeelding spreken dat er intuïtief het inzicht door wordt bevorderd. De voorbeelden zijn gekozen uit de natuurkunde (grootte en aantal moleculen), psychologie, biologie (Fabre's experiment over mieren), vierdimensionale meetkunde (hyperkubus), slingerproef, wetten van het toeval (machineschrijvende apen). The seven examples should serve to illustrate that the teaching of any science can be greatly enhanced, made more dramatic, and more stimulating, and more complete, if the teacher, or text-book author, strives, wherever possible, to use the „poetic" technique of communication, conveying with a sensory image or fantasy both the intellectual ideas involved and the analogous sense experience.

In no 496 (november 1956) somt M. Stephany in „*What Johnny should read*" een paar dozijn titels op van boeken over geschiedenis der wiskunde en van boeken die algemene informatie beogen. We vinden onder de aanbevolen auteurs de namen Ball, Bell, Cajou, Courant, Heath, Kasner & Newman, Polya, Smith en Whitehead. Verder wordt verwezen naar periodieken (Scientific America, American Mathematical Gazette) voor oriëntatie in de waarschijnlijkheidsrekening, de statistiek, de topologie, de getallenleer, de theorie der kansspelen, de symbolische logica, enz.

H. F. Fehr (U.S.A.) schrijft samen met Kay Piene (Noorwegen) over „*Mathematics instruction in the secondary schools of Norway*". Het artikel geeft een algemeen overzicht over de Noorse onderwijsorganisatie, over de wiskundeprogramma's van Realskole en Gymnas, en enkele mededelingen over de opleiding van wiskundeleraren. De examenopgaven 1955 voor wiskunde (real line, examen artium) zijn als appendix toegevoegd. Over de leraarsopleiding lezen we: If the teacher intends to teach only Classes I and II and Realskole III, upon passing the University examination he will attend the Pedagogical Seminar for one half year where he will study foundations of education (history, philosophy, psychology, hygiene, administration, curriculum and methods of teaching) and teach in a school. He will then be about 23 years of age and will start teaching.

To teach in Classes III, IV and V, however, he must return to the University after the Pedagogical Seminar and continue his University-study for another 1½ to 2 years. (In practice a lot of the mathematics teachers in the Gymnas have not taken mathematics as their major subject in the four year University program, but

physics, geography, etc. Rather few specialize in mathematics). This study is entirely in the field of mathematics and includes theory of functions of a real and complex variable, theory of numbers, abstract algebra, analytic geometry of space, and special fields such as probability, topology, calculus of finite differences, etc. Upon passing examinations and writing a thesis he will be permitted to teach in the Gymnas.

De belangstelling voor de kenmerken van deelbaarheid die in ons land een baisse beleeft, schijnt in Amerika een hausse door te maken. Zie het artikel van W. R. Ransom over „*Divisibility tests*" in nummer 500 (Maart 1957).

In nummer 501 behandelen M. F. Rosskopf en R. M. Exner een stuk logistiek in „*Logic of indirect proof*". Zij schrijven o.a.: The forms of indirect proof considered in this paper — indirect proof by contradiction and by cases — are related . . . In each form the contrapositive plays a fundamental role. Hence, the authors feel that the contrapositive should take on more importance in high school geometry.

Het probleem van de meer begaafde leerlingen stelt de leraar in de Amerikaanse scholen voor ernstige problemen, zoals uit artikelen in de tijdschriften bij herhaling blijkt. In nummer 502 snijdt M. S. Norton het probleem aan in „*Enrichment as a provision for the gifted in mathematics*". Probably one of the best and most adaptive methods of providing for the gifted pupil in mathematics is through enrichment. Enrichment, if adapted to each individual student rather than the group, is excellent for developing interest, initiative, insight, and other valued phases of learning connected with works in mathematics. Usually, enrichment implies supplementary educational experiences used for the optimum development of each pupil. The true enrichment process does not merely include the addition of extra work for the pupil concerned, but aims to enrich the pupil's entire learning process.

De auteur geeft een aantal practische wenken onder de volgende „headings": (1) reading and writing activities; (2) individual and group projects in mathematics; (3) additional exercises and supplementary problems; (4) building vocabulary in mathematics; (5) applications in mathematics; (6) mathematical assemblies; (7) mathematical clubs and organizations.

VIII. *Paedagogische Studiën.*

Voor de wiskunde leraar zijn de artikelen van de Van Hiele's in dit tijdschrift het belangrijkst.

In nummer 5 van de 34e jaargang schrijven ze over „*Een denkpsychologische benadering van het begrip denkniveau*". Het niveaubegrip is belangrijk voor de didaktiek door de onderscheiding van de twee fasen in het leerproces, die nodig zijn voor het bereiken ervan: in de eerste fase de kontekstbeleving en de symboolvorming, in de tweede fase de oriëntatie door middel van het signaalkarakter der symbolen.

De kennis van de niveaus kan de leraar ervoor behoeden bij zijn leerlingen te appelleren aan een begripsniveau dat zij nog niet verworven hebben.

Het doorzien van het begrip „niveau" kan de psycholoog ervoor behoeden aan rijping toe te schrijven, wat het resultaat van een leerproces is.

In „*Teoretische Didaktiek*" in nummer 6 bepleiten de auteurs dat de door de docent te kiezen leersituaties achtereenvolgens de volgende ervaringen moeten verschaffen:

1. de kontekst van het leervak;
2. de symbolen van het leervak;
3. de signalen bij deze symbolen;
4. de wijze waarop de symbolen en de signalen gebruikt worden.

De leerlingen leren op het eerste denkniveau het aspekt van het leervak kennen, op het tweede het wezen van het leervak; het derde denkniveau houdt in, dat er inzicht in de theorie van het leervak is verkregen.

BENAMINGEN BIJ FUNCTIES

door

M. DIJKSHOORN

In de 33ste jaargang, nr. 1, van Euclides schrijft Dr. P. Bronkhorst op blz. 26 dat „nulwaarde" een onjuiste benaming is, waarmee ik het volkomen eens ben. In dit verband zij opgemerkt, dat voorgesteld is de invoering van het woord „nulefficient" (letterlijk: nulmaker of nulsteller).[1]) Hierdoor komt duidelijker tot uitdrukking dat hij geen waarde van de functie is, maar van het argument van de functie. Het woord „nulpunt" wordt voor het snijpunt van de grafiek van $f(x)$ met de x-as gereserveerd.

Evenzo verdient het aanbeveling om te spreken van „poolefficient" (een waarde van het argument, die b.v. in de functie $1/f(x)$ de noemer nul maakt) en van „pool" (het bijbehorende punt op de as).[2])

---

[1]) Zie „Leerboek der Algebra" van Dijkshoorn, Kiers en Kleyn, deel II, blz. 4 en 33.

[2]) Zie t.a.p. deel IV B blz. 106.

DE TERM NULWAARDE

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Tegen de term nulwaarde van een functie wordt herhaaldelijk bezwaar gemaakt, m.i. ten onrechte. De definitie luidt: een nulwaarde van een functie is een getal, dat, voor het argument gesubstitueerd, de functie gelijk aan 0 maakt. Omdat het hier een terminologische en dus ook taalkundige kwestie betreft, wil ik deze definitie de volgende, slordiger gedaante geven: een *nulwaarde* is een *waarde,* die *een functie* gelijk aan *nul* maakt.

De taalkundige structuur van deze uitspraak is als volgt:

een y–x (nul-waarde) is een x (waarde), die op een of andere z (functie) een werking uitoefent, waardoor deze y (nul), wordt.

Komt het in de taal meer voor, dat de betekenis van een samengesteld woord op een dergelijke manier verklaard moet (of kan) worden? Na enig zoeken vindt men gemakkelijk voorbeelden hiervan. Zo is

een *geneesmiddel* een *middel,* dat op *een individu* een werking uitoefent, waardoor dit *geneest,*

witkalk een soort *kalk,* dat dient om *een plafond* (of muur), *wit* te maken.

Andere voorbeelden zijn: genotmiddel, slagwerk, krachtvoer, drooglijn, koelcel, glansverf, steunzool.

Op deze wijze zien we, dat de samenstelling van de term nulwaarde verantwoord is. Er wordt echter nog een ander bezwaar naar voren gebracht. In de bovenstaande slordige omschrijving is alleen gesproken over „nulwaarde", terwijl gesproken had moeten worden over „nulwaarde van een functie". En nu vindt men het verwerpelijk om te spreken over een nulwaarde *van een functie,* omdat hiermee niet een bepaalde waarde van de functie (maar van het argument) bedoeld is. Ook dit bezwaar lijkt mij niet steekhoudend. Een grootvader van Jan is niet een bepaalde vader van Jan. En, om binnen het kader van de wiskunde te blijven, een buitenhoek van een driehoek is niet een bepaalde hoek van de driehoek. Integendeel, een buitenhoek van een driehoek is een hoek, die tot de driehoek in een bepaalde relatie staat. En evenzo is een nulwaarde van een functie een waarde, die tot de functie in een bepaalde relatie staat. Ik zou dus niet gaarne de voorstellen willen steunen deze term, die een zeker burgerrecht heeft verkregen, door een andere te vervangen, als daarvoor geen betere argumenten aangevoerd kunnen worden.

DE EENHEDEN IN DE LEERBOEKEN

De circulaire door het bestuur van „Wimecos" gezonden aan de auteurs en uitgevers van mechanicaleerboeken voor het V.H.M.O. (*Euclides,* 32, *pag.* 256)

Bedoelde circulaire werd verzonden aan de auteurs en uitgevers van 14 mechanicaleerboeken. Hiervan reageerden de auteurs van 6 leerboeken en 1 uitgever.

Van de schrijvers deelden 2 mede, dat zij van hun werk geen nieuwe druk het licht zouden laten zien.

De genoemde uitgever berichtte dat zijn auteurs in principe wel bereid waren het m.kg.s. A. stelsel in te voeren, hoewel zij wel op enige bezwaren gewezen hadden. Op de M.T.S.-en wordt het stelsel (nog) niet gebruikt, terwijl sommige voor het V.H.M.O. bestemde boeken ook op scholen voor V.M.T.O. worden gebruikt.

Eén auteur was zonder beperking voor. Door de anderen werden enige bezwaren genoemd. Het oefenmateriaal dat de leerlingen in de eindexamenopgaven hebben en die nog in de thans gebruikelijke eenheden zijn gesteld zou aan waarde inboeten. Een der auteurs had de mening van enige Delftse hoogleraren gevraagd. Deze meningen waren verdeeld.

Een andere door de auteurs gemaakte opmerking was dat het *uitsluitend* gebruik van het m.kg.s.A.-stelsel niet wenselijk zou zijn: a) in de statica en in het dagelijks leven zullen de kg en de g voorlopig als eenheden gehandhaafd blijven; b) bij voortgezette studie zullen de leerlingen de c.g.s.-eenheden zo dikwijls tegenkomen dat het geheel achterwege laten van dit stelsel h.i. niet verantwoord is; c) deze auteurs vinden omrekening van eenhedenstelsels op *beperkte* schaal leerzaam.

De schrijvers van een voor het N.O. bedoeld leerboek merken op dat hun boek is samengesteld in overeenstemming met het leerplan van het Nederlands Genootschap tot opleiding van leerkrachten bij het N.O. Zolang het H.B. van dit genootschap niet tot invoering besluit, zal het niet in hun leerboek worden opgenomen.

De reacties zijn dus nogal gereserveerd.

De secretaris van WIMECOS.

EEN TOEPASSING VAN DE GRAFIEK VAN DE FUNCTIE sin x.

door

Dr W. A. M.. BURGERS

De opgave luidt: In $\triangle$ ABC geldt: sin A. sin B $= \frac{3}{4}$, A $\geqq$ C; gevraagd: de intervallen die toelaatbaar zijn voor A, B en C.

Oplossing: De startplaats is 60°. A = B = C. Sin A = sin B = sin C $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Als we het startsein geven, zal A naar rechts gaan (want dan neemt sin A toe), dus moet B naar links gaan.

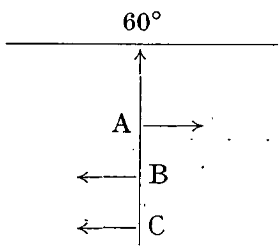
Wat doet C?

Als sin A evenveel zou *toenemen* als sin B *afneemt*, zou het product sin A $\times$ sin B kleiner worden. Immers $(\frac{1}{2}\sqrt{3} + p)(\frac{1}{2}\sqrt{3} - p) = \frac{3}{4} - p^2$. Sin A moet dus méér toenemen, dan sin B afneemt.

A groeit dus sneller dan B afneemt.

Dit effect wordt nog versterkt door het feit, dat de grafiek van sin x links van 60° steiler is dan rechts van 60°.

Het gevolg is, dat C met het verschil van de wijzigingen van A en B *afneemt*. De situatie is dus:



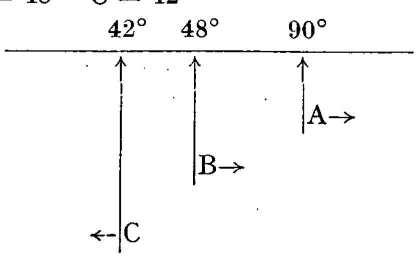
Dit duurt tot A in 90° is aangekomen. Dan is sin A = 1 en sin B $= \frac{3}{4}$.

B is dus ongeveer 45°, nemen we: $\frac{\pi}{4} + p$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + p\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} . \cos p + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin p \backsim \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{p}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \rightarrow p \backsim$$

0,06 $\backsim$ 3°. Samenvattend:

A = 90° B = 48° C = 42°



Blijkbaar is B door C gepasseerd. Ging C dan sneller dan B? We gaan daarvoor na wanneer C = B, A = 180 — 2B

$\sin 2B \sin B = \frac{3}{4} \rightarrow 8 \cos^3 A - 8 \cos B + 3 = 0$

of $(2 \cos B - 1)(4 \cos^2 B + 2 \cos B - 3) = 0$

$C = B = 60°$ (startplaats) en $\cos B = \frac{-1+\sqrt{13}}{4} \backsim 0{,}6$. Hierbij hoort dus een waarde van B, die kleiner is dan 60°.

C gaat dus eerst trager, later sneller dan B.

Passeert A de 90°, dan neemt sin A *af*. Dus sin B neemt toe, B *dus ook*. Gevolg: C daalt nog sneller. Is A in 120° aangekomen, dan is B terug in 60° en A is in 0° aangekomen.

Conclusie: $60° \leqq A < 120°$; $\text{bg} \sin \frac{3}{4} \leqq B \leqq 60°$; $0° < C \leqq 60°$.

OFFICIËLE MEDEDELING VAN WIMECOS

Algemene jaarlijkse vergadering op maandag 30 december 1957 in het I.C.C.-paviljoen, Vondelpark 3, Amsterdam. Aanvang 10.30 uur v.m.

Voorlopige agenda:

1. Opening door de Voorzitter.
2. Jaarverslagen (van de secretaris, de penningmeester, de kascommissie, redactie van „EUCLIDES", de commissie voor de leesportefeuille).
3. Benoeming van een nieuwe kascommissie.
4. Bestuursverkiezing wegens periodieke aftreding.
5. Lezing van dr. G. Bosteels te Antwerpen over het verplichte Wiskundeonderwijs in de hoogste leerkring in België. — Pauze.
6. Lezing van prof. dr. M. G. J. Minnaert te Utrecht over het Onderwijs in de Cosmografie.

Leden kunnen nieuwe agendapunten voorstellen **vóór 1 december a.s.** bij de secretaris, **Charlotte de Bourbonlaan 64,** Zeist.

J. F. Hufferman, secretaris.

HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP

Op de vergadering van 28 september 1957 nam het Wiskundig Genootschap een tweetal zeer belangrijke besluiten: 1° het instellen van examens voor „wetenschappelijk rekenaar"; 2° de oprichting van een sectie van het genootschap voor toegepaste wiskunde.

KALENDER

MATHEMATISCH CENTRUM

Op woensdag 20 november 1957 te 20.00 uur houdt Prof. Dr J. P. van Rooijen in het gebouw van het M.C. (2de Boerhaavestraat 49 te Amsterdam) een voordracht „Over Bernstein-polynomen" in de serie „Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht". Kosteloos toegankelijk.